

## Schwingung eines Plasmazyinders in einem äußeren Magnetfeld

Von K. KÖRPER

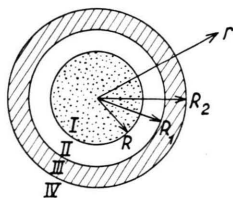
Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforsch. 12 a, 815–821 [1957]; eingegangen am 11. Juni 1957)

Es werden die durch elektromagnetische Strahlung erregten Schwingungen einer kreiszylindrischen, homogenen, unendlich langen, einem homogenen axialen statischen Magnetfeld ausgesetzten Plasmasäule behandelt. Die zwei möglichen Schwingungstypen lassen sich durch die Richtung des im Plasma induzierten Stromes relativ zum Magnetfeld unterscheiden. Bei Strömen parallel zum Magnetfeld werden die Schwingungen durch den ECCLESSchen Brechungsindex charakterisiert. Ströme senkrecht zum Magnetfeld liefern einen Brechungsindex, der zwei von der Teilchendichte des Plasmas und dem statischen Magnetfeld abhängige Resonanzfrequenzen (Ionenresonanz, Elektronenresonanz) besitzt. Dieser Brechungsindex geht für kleine Frequenzen in den für magnetohydrodynamische Wellen über. — Aus den Grundgleichungen wird der Energiesatz des Plasmas hergeleitet; er enthält neben der elektromagnetischen Strahlungsleistung, der JOULESchen Wärme und den Zeitableitungen der elektrischen und magnetischen Energiedichte noch die der kinetischen Energien der Elektronen und Ionen.

The oscillations of a plasma cylinder of infinite length have been analyzed. The plasma is assumed to be homogeneous and to be exposed to a static homogeneous magnetic field in axial direction. There are two different types of oscillations. In one case the induced current is parallel to the magnetic field, and is therefore not influenced by it. In the other case where the induced current is perpendicular to the field two resonance frequencies exist. In the limit of small density and high magnetic field these are the gyrofrequencies of the ions and the electrons. The index of refraction for both types in the limit of small frequencies is that of the "hydromagnetic waves". — From the basic equations the energy conservation theorem is derived. Besides the usual terms giving the electromagnetic radiation, JOULE's losses, the electromagnetic energy density, it contains the kinetic energy of the ions and electrons of the plasma.

Im folgenden soll die Schwingung eines kreiszylindrischen, unendlich langen, einem statischen, homogenen, axialgerichteten Magnetfeld ausgesetzten homogenen Plasmazyinders untersucht werden. Die Anregung erfolge durch elektromagnetische Wellen, welche in einer den Plasmazyylinder umgebenden Spule erzeugt werden und radial nach innen laufen.

Man kann demgemäß vier Bereiche unterscheiden (Abb. 1):



- Abb. 1.
- |               |                  |  |
|---------------|------------------|--|
| Bereich I :   | $0 \leq r < R_0$ | Plasmazyylinder;   |
| Bereich II :  | $R_0 < r < R_1$  | innerer Vakuumring;  |
| Bereich III : | $R_1 < r < R_2$  | Spule, in der durch einen vorgegebenen Wechselstrom $I$ eine elektromagnetische Welle erregt wird; |
| Bereich IV :  | $R_2 < r$        | äußeres Vakuum, welches sich bis ins Unendliche fortsetzt.   |

Es sind also im Bereich I die Plasmagleichungen, in den anderen Bereichen die entsprechenden MAXWELLSchen Gleichungen allgemein zu lösen, und die Lösungen mit Hilfe der Grenzbedingungen einander anzuschließen.

Als Randbedingung sind die Regularitätsbedingung bei  $r=0$  und die asymptotische (Ausstrahlungs-)Bedingung für  $r \rightarrow \infty$  an das Lösungssystem zu stellen.

## I. Grundgleichungen

Als Grundgleichung für das Plasma werden die von SCHLÜTER<sup>1</sup> abgeleiteten Gleichungen vorausgesetzt. Diese entsprechen einer makroskopischen Betrachtungsweise des Plasmas als einer Flüssigkeit und enthalten nach den Vorstellungen der klassischen Elektronentheorie nur elektrische und magnetische Vakuumfelder sowie Ladung und Masse tragende bewegte Elektronen und Ionen.

In den folgenden Gleichungen werden Druckterme, Wärmeleitfähigkeit und Viskosität vernachlässigt, dagegen wird der Verschiebungsstrom beibehalten. Ferner sind die totalen Ableitungen nach der Zeit durch partielle ersetzt, da nur ein im Verhältnis zum statischen Magnetfeld  $\mathfrak{H}_0$  kleines Wechselfeld  $\mathfrak{H}$  angenommen wird ( $|\mathfrak{H}| \ll |\mathfrak{H}_0|$ ). Unter diesen Vor-

<sup>1</sup> A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. 5 a, 721 [1950].



aussetzungen lautet das die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}$ , die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$ , die hydrodynamische Geschwindigkeit  $\mathfrak{v}$  und die makroskopische Stromdichte  $\mathfrak{j}$  miteinander verknüpfende System der Grundgleichungen:

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{E}, \tag{1}$$

$$\text{rot } \mathfrak{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{H}, \tag{2}$$

$$\varrho \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = \frac{1}{c} [\mathfrak{j} \times \mathfrak{H}_0] \tag{3}$$

$$\frac{4\pi}{\omega_p^2} \left( \frac{\partial \mathfrak{j}}{\partial t} + \gamma \mathfrak{j} \right) = \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}_0] - \frac{m_i - m_e}{e} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}. \tag{4}$$

Gln. (1) und (2) sind die MAXWELLSCHEN Gleichungen, Gl. (3) die Bewegungsgleichung. Gl. (4) ist das verallgemeinerte OHMSche Gesetz („Diffusionsgleichung“), welches das durch Trägheit und Reibung bedingte Verhalten der Stromdichte unter dem Einfluß des von einem mit  $\mathfrak{v}$  in einem Magnetfeld bewegten Beobachter wahrgenommenen elektrischen Feldes und dem Einfluß des von der Verschiedenheit der Ionenmasse  $m_i$  von der Elektronenmasse  $m_e$  herrührenden „eingepprägten“ elektrischen Feldes beschreibt.  $\omega_p$  ist die Plasmafrequenz, für welche gilt:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi \varrho e^2}{m_i m_e}, \tag{5}$$

+  $e$  ist die (positive) Elementarladung,  $\gamma$  die Stoßfrequenz zwischen Ionen und Elektronen. Wegen Vernachlässigung der Druckterme ist in Gl. (3) im Gleichgewichtsfall auch  $4\pi/c \cdot \mathfrak{j}_0 = \text{rot } \mathfrak{H}_0 = 0$ .

Die Quellgleichung  $\text{div } \mathfrak{H} = 0$  (6)

ist bei den in diesem Zusammenhange allein interessierenden zeitlich periodischen Lösungen automatisch erfüllt, während die Quellgleichung

$$\text{div } \mathfrak{E} = 4\pi \varepsilon \tag{7}$$

lediglich die Definitionsgleichung für die sich im Plasma unter dem Einfluß des elektrischen Feldes einstellende Raumladungsdichte  $\varepsilon$  bedeutet.

Für die nachfolgenden Betrachtungen sei das Plasma in dem Zylinder und das statische Magnetfeld als homogen und zeitunabhängig vorausgesetzt.

Als Grundgleichung außerhalb des Plasmas gelten die MAXWELLSCHEN Gln. (1) und (2) mit  $\mathfrak{j} = \text{const} \neq 0$  in der Spule und mit  $\mathfrak{j} = 0$  im Vakuum.

## 2. Grenzbedingungen

Allgemein lassen sich für Feldgrößen die Grenzbedingungen zwischen verschiedenen Medien durch Integration über ein Rechteck verschwindend kleiner Breite und beliebiger Länge gewinnen, welches ein beliebig gerichtetes Liniestück in der Grenzfläche zwischen den beiden Medien der Länge nach enthält (vgl. LÜST<sup>2</sup>). Man erhält als Grenzbedingungen, wenn  $\mathfrak{n}$  der vom Medium 1 nach Medium 2 gerichtete Grenzflächennormalen-Einheitsvektor ist:

$$[\mathfrak{n} \times (\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1)] = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{j}^* - \frac{1}{c} \mathfrak{n} (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1), \tag{1'}$$

$$[\mathfrak{n} \times (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)] = + \frac{1}{c} \mathfrak{n} (\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1), \tag{2'}$$

$$- \varrho u (\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1) = \frac{1}{c} [\mathfrak{j}^* \times \mathfrak{H}_0], \tag{3'}$$

$$\frac{4\pi}{\omega_p^2} (-u (\mathfrak{j}_2 - \mathfrak{j}_1) + \gamma \mathfrak{j}^*) = - \frac{m_i - m_e}{e} u (\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1). \tag{4'}$$

$$\mathfrak{n} (\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1) = 0, \tag{5'}$$

$$\mathfrak{n} (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1) = 4\pi \varepsilon^*. \tag{6'}$$

$u = \mathfrak{v} \mathfrak{n}$  ist die Geschwindigkeit der Grenzfläche, und  $\mathfrak{j}^*$  und  $\mathfrak{v}^*$  bedeuten die Flächenstromdichte bzw. die Flächenladungsdichte (= Oberflächenladung). Bei konsequenter Beschränkung auf lineare Terme bleibt mit  $\mathfrak{j}^* = 0$ :

$$[\mathfrak{n} \times (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)] = 0, \tag{8}$$

$$[\mathfrak{n} \times (\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1)] = 0, \tag{9}$$

$$\mathfrak{n} (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1) = 0, \tag{10}$$

$$\mathfrak{n} (\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1) = 4\pi \varepsilon^*. \tag{11}$$

Bei Abwesenheit von Flächenströmen verhalten sich also an der Grenze zwischen Plasma und Vakuum die Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{E}$  und die Normalkomponente von  $\mathfrak{H}$  stetig. Der Sprung in der Normalkomponente von  $\mathfrak{E}$  gibt Veranlassung zu einer Oberflächenladung.

Bei Anwesenheit eines z. B. äußerlich erzwungenen Oberflächenstromes  $\mathfrak{J}$  erhält man an der Grenze zwischen Plasma und Vakuum einen Sprung der Tangentialkomponente des Magnetfeldes

$$[\mathfrak{n} \times (\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1)] = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{J}, \tag{12}$$

wie er auch für an eine Stromschicht beiderseitig grenzende Vakuumfelder unmittelbar aus den beiden MAXWELLSCHEN Gleichungen abgelesen werden kann.

<sup>2</sup> R. Lüst, Z. Naturforschg. 8 a, 277 [1953].

**3. Lösungen der Grundgleichungen**

Bei rein periodischer Zeitabhängigkeit gemäß  $e^{+i\omega t}$  gehen die Plasmagleichungen (1) bis (4) über in

$$\text{rot } \mathfrak{S} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{j} + i k \mathfrak{E}, \tag{13}$$

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -i k \mathfrak{S}, \tag{14}$$

$$i \omega \varrho \mathfrak{v} = \frac{1}{c} [\mathfrak{j} \times \mathfrak{S}_0], \tag{15}$$

$$\frac{4\pi}{\omega_p^2} (i \omega + \gamma) \mathfrak{j} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \times \mathfrak{S}_0] - \frac{m_i - m_e}{e} i \omega \mathfrak{v}. \tag{16}$$

Hier bedeutet  $k = \omega/c$  die Wellenzahl elektromagnetischer Wellen im Vakuum. Bei Unabhängigkeit aller Feldgrößen  $\mathfrak{E}, \mathfrak{S}, \mathfrak{j}, \mathfrak{v}$  vom Azimutwinkel  $\varphi$  und der axialen Koordinate  $z$ , d. h.

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \text{ und } \frac{\partial}{\partial z} = 0, \text{ (Kreiszyindersymmetrie)} \tag{17}$$

erhält man für die zwölf Vektorkomponenten zwölf Gleichungen:

$$0 = \frac{4\pi}{c} j_r + i k E_r, \tag{18}$$

$$- \frac{\partial}{\partial r} H_z = \frac{4\pi}{c} j_\varphi + i k E_\varphi, \tag{19}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r H_\varphi = \frac{4\pi}{c} j_z + i k E_z, \tag{20}$$

$$0 = -i k H_r, \tag{21}$$

$$- \frac{\partial}{\partial r} E_z = -i k H_\varphi, \tag{22}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_\varphi = -i k H_z, \tag{23}$$

$$\varrho i \omega v_r = \frac{1}{c} j_\varphi H_0, \tag{24}$$

$$\varrho i \omega v_\varphi = -\frac{1}{c} j_r H_0, \tag{25}$$

$$\varrho i \omega v_z = 0, \tag{26}$$

$$\frac{4\pi}{\omega_p^2} (i \omega + \gamma) j_r = E_r + \frac{1}{c} v_\varphi H_0 - \frac{m_i - m_e}{e} i \omega v_r, \tag{27}$$

$$\frac{4\pi}{\omega_p^2} (i \omega + \gamma) j_\varphi = E_\varphi - \frac{1}{c} v_r H_0 - \frac{m_i - m_e}{e} i \omega v_\varphi, \tag{28}$$

$$\frac{4\pi}{\omega_p^2} (i \omega + \gamma) j_z = E_z - \frac{m_i - m_e}{e} i \omega v_z. \tag{29}$$

Die Symmetriebedingung (17) zieht also  $H_r = v_z = 0$  nach sich. Das übrigbleibende Gleichungssystem zerfällt in zwei voneinander unabhängige Systeme:

System I enthält die Gln. (18), (19), (23), (24), (25), (27), (28) mit den Komponenten  $j_\varphi, j_r, E_\varphi, E_r, H_z, v_r, v_\varphi$ ;

System II enthält die Gln. (20), (22), (29) mit den Komponenten  $j_z, H_\varphi, E_z$ .

Aus dem System I läßt sich eine BESSELSche Differentialgleichung für  $E_\varphi$  und aus System II eine für  $H_\varphi$  ableiten. Aus diesen beiden Feldgrößen können alle anderen berechnet werden.

Im System II erhält man durch Eliminierung von  $E_z$  und  $j_z$  für  $H_\varphi$  die Gleichung

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r H_\varphi + K^2 H_\varphi = 0, \tag{30}$$

welche durch allgemeine Zylinderfunktionen  $Z_1(Kr)$  integriert wird. Aus der Lösung

$$H_\varphi = Z_1(Kr) \tag{31}$$

gewinnt man

$$E_z = -i \frac{k}{K} Z_0(Kr), \tag{32}$$

$$j_z = -i \frac{k}{K} \frac{\omega_p^2}{4\pi(i\omega + \gamma)} Z_0(Kr). \tag{33}$$

Das Verhältnis  $K/k = n$  bezeichnet man als Brechungsindex. Man erhält dafür:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\gamma\omega}. \tag{34}$$

Diese Relation ist unter dem Namen „ECCLESsche Beziehung“ schon seit langem bekannt, und gilt für die Ausbreitung transversaler elektromagnetischer Planwellen im magnetfeldfreien Plasma. Im vorliegenden Falle von Zylinderwellen [Gln. (31) bis (33)] ist die Stromdichte  $\mathfrak{j}$  parallel dem äußeren Magnetfeld  $\mathfrak{S}_0$ , so daß wegen Gl. (15)  $\mathfrak{v} = 0$  gilt und in Gl. (16) rechts nur noch das elektrische Feld  $\mathfrak{E}$  der Welle stehen bleibt. Insgesamt sind also in den Gln. (13) bis (16) genau die Terme weggefallen, durch welche sich das Gleichungssystem für das Plasma im Magnetfeld von dem des magnetfeldfreien unterscheidet. Ferner lassen sich Zylinderwellen stets als Überlagerung von ebenen Wellen interpretieren<sup>3</sup>, so daß die Übereinstimmung des Brechungsindex für ebene Wellen im magnetfreien Plasma mit dem für Zylinderwellen obiger Konfiguration verständlich ist.

Die Differentialgleichung für  $E_\varphi$  erhält man aus System I, indem man mit Hilfe von Gln. (24), (25)

<sup>3</sup> A. SOMMERFELD, Vorlesung über Theor. Physik, Bd. VI, Leipzig 1947.

und (27), (28) die Stromdichtekomponenten  $j_r$  und  $j_\varphi$  durch die Feldstärkekomponenten  $E_r$  und  $E_\varphi$  ausdrückt und in Gln. (18) und (19) einsetzt. Die Gln. (18), (19), (23) enthalten dann nur noch Feldstärken. Eliminierung von  $H_z$  und  $E_r$  liefert

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E_\varphi + K^2 E_\varphi = 0. \tag{35}$$

Der durch die Wellenzahl  $K$  im Plasma definierte Brechungsindex wird im nächsten Abschnitt eingehend diskutiert.

Die allgemeinen Lösungen der Plasmagleichungen lassen sich jetzt leicht angeben. Die für  $r=0$  reguläre Lösung von (35) wird gegeben durch die Zylinderfunktion erster Art (BESSEL-Funktion) der ersten Ordnung

$$E_\varphi = a J_1(K r). \tag{36}$$

$a$  ist die über die Grenzbedingungen noch festzulegende, im allgemeinen komplexe Integrationskonstante. Aus den Gln. (18) bis (29) erhält man leicht

$$H_z = a i n J_0(K r), \tag{37}$$

$$E_r = \frac{\omega_p^2 - (n^2 - 1) \langle \omega_0 \rangle}{i \omega \omega_H} a J_1(K r). \tag{38}$$

Hierbei ist  $\omega_0$  das geometrische Mittel aus den Gyrofrequenzen  $\omega_{ce}$  und  $\omega_{ci}$  der Elektronen und Ionen

$$\omega_0 = \frac{e H_0}{c \sqrt{m_i m_e}}, \tag{39}$$

und  $\omega_H$  ist die modifizierte Gyrofrequenz der Elektronen:

$$\omega_H = \frac{e H_0}{c} \frac{m_i - m_e}{m_i m_e}. \tag{40}$$

Das Symbol  $\langle \omega_0 \rangle$  steht als Abkürzung für

$$(\omega_0^2 + i \gamma \omega - \omega^2) = \langle \omega_0 \rangle. \tag{41}$$

Für die Ströme und Geschwindigkeiten erhält man:

$$j_\varphi = \frac{i \omega}{4 \pi} (n^2 - 1) a J_1(K r), \tag{42}$$

$$j_r = - \frac{1}{4 \pi} \frac{\omega_p^2 - (n^2 - 1) \langle \omega_0 \rangle}{\omega_H} a J_1(K r), \tag{43}$$

$$v_\varphi = \frac{H_0}{4 \pi c \varrho} \frac{\omega_p^2 - (n^2 - 1) \langle \omega_0 \rangle}{i \omega \omega_H} a J_1(K r), \tag{44}$$

$$v_r = \frac{H_0}{4 \pi c \varrho} (n^2 - 1) a J_1(K r). \tag{45}$$

Man hat also eine radiale und azimutale Bewegung des Plasmas mit von der Frequenz abhängiger gegenseitiger Phasenlage.

Aus den beiden MAXWELL-Gleichungen (13) und (14) mit  $j=0$  folgt  $E_r = H_r = 0$ . Von den beiden im Vakuum möglichen, voneinander unabhängigen transversalen Wellentypen, die sich im wesentlichen durch die Polarisationsrichtung unterscheiden,

$$E_\varphi = Z_1(k r), \tag{46}$$

$$H_z = i Z_0(k r), \tag{47}$$

und

$$H_\varphi = Z_1(k r), \tag{48}$$

$$E_z = -i Z_0(k r), \tag{49}$$

läßt sich der erste an das Lösungssystem I, der zweite an das Lösungssystem II der Plasmagleichungen anschließen. Die vorgegebene Stromverteilung in der Spule kann aber nur Schwingungstyp I anregen. Somit lautet die allgemeine Lösung für den inneren Vakuumring (Bereich II)

$$E_\varphi = \alpha_1 J_1(k r) + \beta_1 N_1(k r), \tag{46'}$$

$$H_z = i [\alpha_1 J_0(k r) + \beta_1 N_0(k r)], \tag{47'}$$

wobei  $N_\nu(z)$  die Zylinderfunktion zweiter Art (NEUMANNsche Funktion) der Ordnung  $\nu$  ist.

Außerhalb der Spule (Bereich IV) sind wegen der SOMMERFELDSchen Ausstrahlungsbedingungen<sup>3</sup> nur auslaufende Zylinderwellen möglich. Wie man aus der asymptotischen Darstellung erkennt, werden diese durch HANKEL-Funktionen zweiter Art beschrieben<sup>4</sup>:

$$E_\varphi = \alpha_2 H_1^{(2)}(k r), \tag{50}$$

$$H_z = i \alpha_2 H_0^{(2)}(k r). \tag{51}$$

Aus den MAXWELL-Gln. (1) und (2) erhält man nach Eliminierung von  $\mathfrak{H}$  die Differentialgleichung einer durch eine vorgegebene Stromdichte erregte Welle,

$$\text{rot rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{E} = - \frac{4 \pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathfrak{J}}, \tag{52}$$

deren Azimutalkomponente bei der hier vorgeschriebenen Zylindersymmetrie und Zeitabhängigkeit einer inhomogenen BESSELSchen Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E_\varphi + k^2 E_\varphi = \frac{4 \pi}{c^2} i \omega j_\varphi. \tag{53}$$

Betrachtet man  $j_\varphi$  als konstant im Bereiche  $R_1 < r < R_2$ , so erhält man als allgemeine Lösung

<sup>4</sup> MAGNUS-OBERHETTINGER, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Springer-Verlag, Berlin 1943.

$$E_{\varphi} = b' J_1(kr) + d' N_1(kr) + i \frac{4\pi}{\omega} j_{\varphi} S_{11}(kr), \quad (54)$$

$$H_z = i(b' J_0(kr) + d' N_0(kr)) - \frac{4\pi}{\omega} j_{\varphi} S_{00}(kr). \quad (55)$$

Die Funktion  $w(z) = S_{\mu\nu}(z)$  sind LOMMEL-Funktionen, welche erklärt sind als Lösung der Differentialgleichung

$$z^2 w''(z) + z w'(z) + (z^2 - \nu^2) w(z) = z^{\mu+1}. \quad (56)$$

Für sie gelten ähnliche Rekursionsformeln wie für die Zylinderfunktionen<sup>4</sup>.

Für die weiteren Betrachtungen sei der rechnerischen Einfachheit halber die den Bereich  $R_1 < r < R_2$  ausfüllende dicke Spule ersetzt durch eine konzentrierte Stromschicht bei  $r = R_1$  mit der Stromdichteverteilung

$$j_{\varphi} = I \delta(r - R_1). \quad (57)$$

Man kann dann den anregenden Strom  $I$  durch die Sprungbedingung (12) in das Feld der Vakuumwelle einführen.  $\delta(r - R_1)$  ist die DIRACsche  $\delta$ -Funktion mit der Eigenschaft

$$\int_0^{\infty} \delta(r - R_1) dr = 1. \quad (58)$$

Die für die einzelnen Raumbereiche gewonnenen Lösungen der Grundgleichungen lassen sich jetzt über die Grenzbedingungen (8), (9), (12) aneinander anschließen. Auf diese Weise werden die Amplituden  $a$  und  $\alpha_2$  festgelegt.

Zur weiteren Vereinfachung sei fernerhin vorausgesetzt, daß die stromführende Spule unmittelbar an den Plasmazylinder grenzt. Dann liefert die Grenzbedingungen bei  $r = R_1 = R$

$$a J_1(KR) - \alpha_2 H_1^{(2)}(kR) = 0, \quad (59)$$

$$a i n J_0(KR) - \alpha_2 i H_0^{(2)}(kR) = \frac{4\pi}{c} J. \quad (60)$$

woraus für die Amplituden folgt

$$a = i \frac{4\pi}{c} I \frac{H_1^{(2)}(kR)}{J_1(KR) H_0^{(2)}(kR) - n J_0(KR) H_1^{(2)}(kR)}, \quad (61)$$

$$\alpha_2 = i \frac{4\pi}{c} I \frac{J_1(KR)}{J_1(KR) H_0^{(2)}(kR) - n J_0(KR) H_1^{(2)}(kR)}. \quad (62)$$

Damit ist das gesamte Wellenfeld beschrieben.

#### 4. Der Brechungsindex des Plasmas

Für den durch die Wellengleichung (35) definierten Brechungsindex  $n = K/k$  erhält man nach einigen Umformungen

$$n^2 - 1 = \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2 + \omega_p^2)}{\omega^2 \omega_H^2 - (\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2 + \omega_p^2)(\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2)}. \quad (63)$$

Hierin bedeuten

$\omega_p$	die Plasmafrequenz,
$\omega_0$	die mittlere Gyrofrequenz,
$\omega_H$	die modifizierte Gyrofrequenz der Elektronen,
$\gamma$	die Stoßfrequenz,
$\omega$	die Kreisfrequenz der einfallenden Welle.

Durch die Struktur von  $n^2$  wird die Einführung des dimensionslosen Parameters

$$s = \omega_p^2 / \omega_0^2 \quad (64)$$

nahegelegt. Er enthält bei gleichbleibenden Konstanten des Plasmas im wesentlichen das Verhältnis  $N/H_0^2$  [= Teilchendichte/(Magnetfeld)<sup>2</sup>]. Außerdem werde als neue dimensionslose Variable an Stelle der Frequenz die Größe

$$x = \omega^2 / \omega_0^2 \quad (65)$$

eingeführt, ferner

$$1/\mu = \omega_H^2 / \omega_0^2 \approx m_i / m_e. \quad (66)$$

Es ist zweckmäßig, den in relativ komplizierter Weise von der Stoßfrequenz  $\gamma$  abhängenden Ausdruck (63) nach Potenzen von  $\gamma/\omega_0$  zu entwickeln.  $\gamma/\omega_0 \ll 1$  bedeutet, daß der mittlere LARMOR-Radius klein gegen die mittlere freie Weglänge ist. Man erhält, wenn man sich auf lineare Glieder beschränkt:

$$n^2 = 1 - \frac{s(1-x+s)}{x/\mu - (1-x+s)(1-x)} - i \frac{\gamma}{\omega_0} \sqrt{x} \frac{s[x/\mu + (1-x+s)^2]}{[x/\mu - (1-x+s)(1-x)]^2}. \quad (67)$$

Wie man unmittelbar sieht, ist  $\Im(n^2)$  negativ definit. Im allgemeinen gilt  $s \gg 1$ , ferner ist für nicht zu hohe Frequenzen  $s \gg x$ ,  $s^2 \gg x/\mu$  erfüllt. Dann vereinfacht sich (67) zu

$$n^2 = - \frac{s^2}{x/\mu - s(1-x)} - i \frac{\gamma}{\omega_0} \sqrt{x} \frac{s^3}{[x/\mu - s(1-x)]^2}. \quad (68)$$

Der Brechungsindex  $n$  in Gl. (63) ist mit dem ebener Wellen, die sich im Plasma senkrecht zum Magnetfeld ausbreiten, identisch. Wie bereits früher von LÜST<sup>5</sup> gezeigt wurde, liefert in diesem Fall das Magnetfeld  $\mathfrak{H}_0$  noch eine zusätzliche Komponente  $\mathfrak{E}_{||}$  in Ausbreitungsrichtung; die Schwingung ist weder rein transversal noch rein longitudinal. Dasselbe gilt für die Stromdichte  $\mathfrak{j}$  und die Geschwindigkeit  $\mathfrak{v}$ . Diese Verhältnisse finden bei Zylinderwellen vom Typ I ihre vollkommene Entsprechung: Das homogene axiale Magnetfeld  $\mathfrak{H}_0$  liegt senkrecht zu der Ausbreitungsrichtung der Zylinderwellen, und es existiert auch hier für die Stromdichte sowohl eine Azimutalkomponente  $j_\varphi$  als auch eine Radialkomponente  $j_r$ . Das gilt auch für die elektrischen Feldstärkekomponenten  $E_\varphi$  und  $E_r$  und die Geschwindigkeiten  $v_\varphi$  und  $v_r$ .

Bezeichnet man den Brechungsindex  $n$  bei verschwindender Stoßfrequenz ( $\gamma=0$ ) mit  $n_0$ , dann gilt in erster Ordnung  $n_0^2 = \Re(n^2)$ . Die Frequenzabhängigkeit von  $n$  wird bei kleinen  $\omega_0$  außer an den Resonanzstellen im wesentlichen durch  $n_0$  gegeben. Daher kann man sich auf die Diskussion

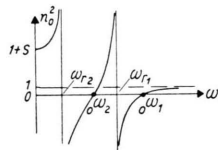


Abb. 2. Frequenzabhängigkeit von  $n_0^2$ ; schematisch.

von  $n_0$  beschränken. Abb. 2 deutet das prinzipielle Verhalten an. Für  $x \ll 1$  geht (67) über in

$$n_0^2 = 1 + \frac{s}{1 - [x/\mu(1+s)]}. \quad (69)$$

Bei sehr kleinen Frequenzen  $x \ll \text{Min}\{1; \mu(1+s)\}$  geht  $n_0$  in den Brechungsindex der magnetohydrodynamischen (ALFVÉNSchen) Wellen über<sup>6</sup>:

$$n_0^2 = 1 + s. \quad (70)$$

Bei sehr hohen Frequenzen  $x \gg \text{Max}\{s; 1/\mu\}$  nähert sich das Quadrat des Brechungsindex dem Werte 1.

$$n_0^2 = 1 - s/x. \quad (71)$$

Die beiden Nullstellen und Pole hängen von  $s$  ab, wie Abb. 3 zeigt.

Für  $s \ll 1$  fallen die Resonanzstellen  $\omega_r$  (Pole) praktisch an die Stellen der Gyrofrequenzen der Elektronen und Ionen:

<sup>5</sup> R. LÜST, Z. Astrophys. 37, 67 [1955].

$$\omega_{r1} \approx \omega_{ce} \left(1 - \frac{m_e}{m_i}\right); \quad \omega_{r2} \approx \omega_{ci} / \left(1 - \frac{m_e}{m_i}\right). \quad (72)$$

Daher ist es sinnvoll, die obere Resonanz auch bei höheren Werten von  $s$  als „Elektronenresonanz“ und die untere als „Ionenresonanz“ zu bezeichnen. Für

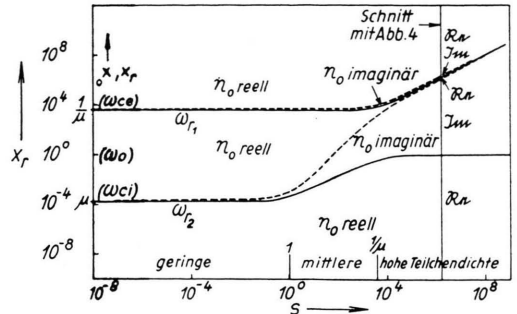


Abb. 3. Pole und Nullstellen von  $n_0$ . — Pole  $x_r$ ; - - - Nullstellen  $0x$ .  $s = (\omega_p/\omega_0)^2$ ;  $x_r = (\omega_r/\omega_0)^2$ .

$s > 1$  ist eine Verschiebung der Resonanzstellen nach höheren Frequenzen charakteristisch. Die Elektronenresonanz wächst oberhalb  $s = 1/\mu$  beliebig an, während die Ionenresonanz im Bereich  $1 < s < 1/\mu$  von  $\omega_{ci}$  auf  $\omega_0$  steigt und dann konstant bleibt.

$$\omega_{r1} \rightarrow \omega_p; \quad \omega_{r2} \rightarrow \omega_0. \quad (73)$$

Das Verhalten der Nullstellen  $0\omega$  von  $n_0$  ist ähnlich:  $s < 1$  liefert

$$0\omega_1 \rightarrow \omega_{ce} \left(1 - \frac{m_e}{m_i}\right); \quad 0\omega_2 \rightarrow \omega_{ci} / \left(1 - \frac{m_e}{m_i}\right). \quad (74)$$

Für  $s \gg 1/\mu$  wird die Elektronenresonanz äquidistant von oben und unten durch Nullstellen eingegrenzt.

$$0\omega_{1,2} \rightarrow \omega_p \left(1 \pm \frac{1}{2\sqrt{\mu s}}\right). \quad (75)$$

Durch das Zusammenlaufen von Polen und Nullstellen für  $s \rightarrow 0$  wird hier ein vakuumähnlicher Brechungsindex  $n_0 = 1$  erreicht, wie man leicht nachrechnet. Dieses Verhalten ist physikalisch leicht einzusehen:  $s \rightarrow 0$  bedeutet entweder  $N \rightarrow 0$  bei endlichem  $H_0$ : Vakuum, oder  $H_0 \rightarrow \infty$  bei endlichem  $N$ : Die Ladungsträger werden durch das Magnetfeld eingefroren, der Radius der Spiralbahn verschwindet. Die Teilchen verlieren gerade die zwei Freiheitsgrade, welche durch die elektromagnetische Welle angeregt werden können.

Abb. 4 zeigt den Verlauf von  $n_0$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $\omega$  für das Magnetfeld  $H_0 = 500$  Gauß und die Teilchendichte  $N = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ . — Abb. 5

<sup>6</sup> H. ALFVÉN, Cosmical Electrodynamics, Oxford University Press, 1950.

5. Energiesatz

stellt den Brechungsindex  $n_0$  für einige Werte  $H_0$  und  $N$  in Abhängigkeit von der Frequenz dar. Man erkennt deutlich die Verschiebung der Resonanzfrequenz.

Den Energiesatz für reelle Feldgrößen erhält man leicht aus den Grundgleichungen. Die beiden MAXWELL-Gln. (1) und (2) liefern mit dem POYNTING-Vektor

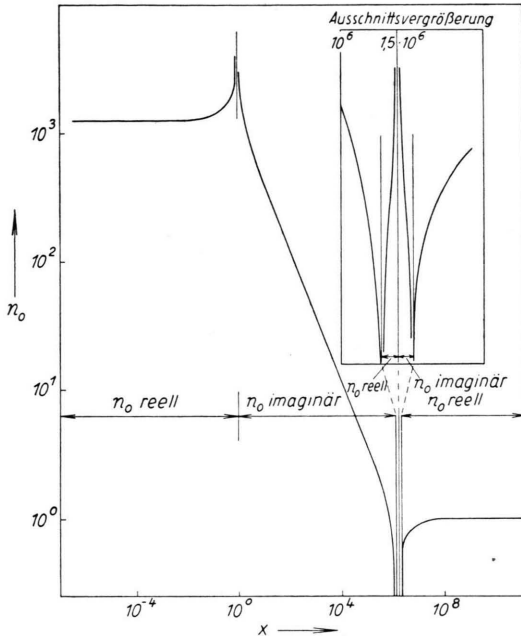


Abb. 4. Brechungsindex  $n_0$  eines Deuteron-Elektronen-Plasmas in Abhängigkeit von der Frequenz bei einem Magnetfeld  $H_0=500$  Gauß und einer Ionendichte  $N=10^{13}$   $\text{cm}^{-3}$ .

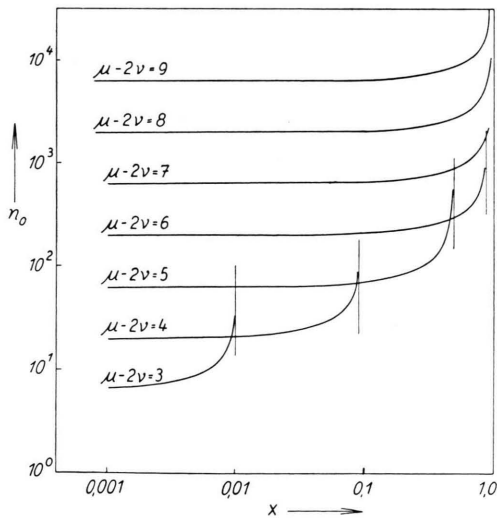


Abb. 5. Brechungsindex  $n_0$  eines Deuteronen-Elektronen-Plasmas unterhalb der Ionenresonanz.  $s=3,8 \cdot 10^{\mu-2\nu-2}$ ;  $H_0=10^\nu$  Gauß;  $N=10^\mu \text{ cm}^{-3}$ ;  $s=(\omega_p/\omega_0)^2$ ;  $x=(\omega/\omega_0)^2$ .

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}] \quad (76)$$

den Energiesatz für solche Medien, in denen elektrisches Feld und Stromdichte in Phase liegen:

$$-\text{div } \mathfrak{S} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi} + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} \right) + (j \mathfrak{E}). \quad (77)$$

Bei Phasenverschiebungen ist der Ausdruck  $(j \mathfrak{E})$  nicht mehr positiv semidefinit, und enthält daher neben der JOULESchen Wärme noch weitere Terme.

Multipliziert man das verallgemeinerte OHMSche Gesetz (4) mit  $j$ , so folgt unter Berücksichtigung von  $v \perp j$  [Gl. (3)]

$$\frac{4\pi}{\omega_p^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (j^2) + \gamma j^2 \right] = (j \mathfrak{E}) - \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v^2). \quad (78)$$

Eliminierung von  $(j \mathfrak{E})$  aus (77) und (78) liefert nach leichten Umformungen den Energiesatz:

$$-\text{div } \mathfrak{S} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi} + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{\omega_p^2} j^2 + \frac{\rho}{2} v^2 \right) + \frac{4\pi}{\omega_p^2} \gamma j^2. \quad (79)$$

Hierin bedeuten der erste Term rechts in der Klammer die elektrische, der zweite Term die magnetische Feldenergiedichte, der dritte Term im *wesentlichen* die kinetische Energiedichte der Elektronen, und der vierte Term im *wesentlichen* die kinetische Energiedichte der Ionen; die letzten beiden Terme sind *genau* die Summe der kinetischen Energiedichten der Ionen und Elektronen, wie eine einfache Rechnung zeigt. Dann besagt der Energiesatz des Plasmas, daß der lokale Schwund der Strahlungsleistungsdichte sich zusammensetzt aus der JOULESchen Aufheizung an derselben Stelle und aus einer Zunahme der elektrischen und magnetischen Feldenergiedichte und der kinetischen Energiedichte der Elektronen und Ionen.

Eine Formulierung des Energiesatzes für komplexe Feldgrößen wird in einer späteren Arbeit folgen. Daran lassen sich dann die mit der Schwingung des Plasmazylinders verbundenen dissipativen Vorgänge behandeln; ferner gestattet die Erweiterung des Energiesatzes auf nicht-abgeschlossene Systeme eine Aussage über die Eingangsimpedanz der mit dem Plasma durch Strahlungskopplung belasteten Spule.